ENSI de PHYSIQUE
DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Durée : 4 heures

Un corrigé

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

• • • • • • • • • • • •

–I–

1. On a :

$$\begin{aligned}
(f-a\mathrm{id}_E)\circ(f-b\mathrm{id}_E) &= f^2-(a+b)f+ab\mathrm{id}_E\\
&= a^2p+b^2q-(a+b)(ap+bq)+ab\mathrm{id}_E\\
&= a^2p+b^2q-a^2p-b^2q-ab(p+q)+ab\mathrm{id}_E\\
&= 0.
\end{aligned}$$

$(X-a)(X-b)$ est un polynôme annulateur de f, scindé à racines simples, donc l'endomorphisme f est diagonalisable.

2. (a) On a $f-a\mathrm{id}_E = ap+bq-ap-aq=(b-a)q$, donc $q=\dfrac{1}{b-a}(f-a\mathrm{id}_E)$. De même, $p=\dfrac{1}{a-b}(f-b\mathrm{id}_E)$.
Ainsi $p\circ q=-\dfrac{1}{(b-a)^2}(f-b\mathrm{id}_E)\circ(f-a\mathrm{id}_E)=-\dfrac{1}{(b-a)^2}(f-a\mathrm{id}_E)\circ(f-b\mathrm{id}_E)=0$ et également $q\circ p=0$.
D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
p^2 &= p\circ p=\frac{1}{(b-a)^2}(f-b\mathrm{id}_E)^2\\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\left(f^2-2bf+b^2\mathrm{id}_E\right)\\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\left((a+b)f-ab\mathrm{id}_E-2bf+b^2\mathrm{id}_E\right)\\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\left((a-b)f-b(a-b)\mathrm{id}_E\right)\\
&= p.
\end{aligned}$$

De même, $q^2=q$.

(b) On sait que $(X-a)(X-b)$ est un polynôme annulateur de f, donc le polynôme minimal π_f de f divise $(X-a)(X-b)$. Donc $\pi_f\in\{X-a, X-b, (X-a)(X-b)\}$.
Si $\pi_f=X-a$, alors $f=a\mathrm{id}_E=ap+aq$ et donc $bq=aq$ car $f=ap+bq$, donc $(b-a)q=0$, ceci est impossible puisque $a\neq b$ et $q\neq 0$. De même, $\pi_f\neq X-b$. Ainsi, $\pi_f=(X-a)(X-b)$ et par conséquent $Sp(f)=\{a,b\}$.

(c) Soit $m\in\mathbb{N}$, Puisque ap et bq commutent, alors on peut utiliser la formule de Binôme :

$$f^m=(ap+bq)^m=\sum_{k=0}^{m}\mathsf{C}_m^k(ap)^k(bq)^{n-k}=(bq)^m+\sum_{k=1}^{m-1}\mathsf{C}_m^k a^k b^{n-k}p^k q^{n-k}+(ap)^m=b^mq+a^mp.$$

Supposons $ab\neq 0$. Alors $a\neq 0$ et $b\neq 0$. On a

$$f\circ\left(\frac{1}{a}p+\frac{1}{b}q\right)=(ap+bq)\circ\left(\frac{1}{a}p+\frac{1}{b}q\right)=p^2+\frac{a}{b}p\circ q+\frac{b}{a}q\circ p+q^2=p+q=\mathrm{id}_E.$$

Par conséquent f est bijective et $f^{-1}=\dfrac{1}{a}p+\dfrac{1}{b}q=a^{-1}a+b^{-1}q$.
Soit $m\in\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} f^m\circ(a^{-m}p+b^{-m}q) &= (a^mp+b^mq)\circ(a^{-m}p+b^{-m}q)\\ &= p^2+a^mb^{-m}p\circ q+b^ma^{-m}q\circ p+q^2\\ &= p+q\\ &= \mathrm{id}_E. \end{aligned}$$

Donc $\forall m\in\mathbb{N}$, $f^m=a^mp+b^mq$ et $f^{-m}=a^{-m}p+b^{-m}q$. Par conséquent : $\forall m\in\mathbb{Z}$, $f^m=a^mp+b^mq$.

3. On sait que $p\in\mathscr{L}(E)$ et $p^2=p$, donc p est un projecteur. De même q est un projecteur.
D'après ce qui précède, p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{a-b}(f-b\mathrm{id}_E)\right)=\mathrm{Im}(f-b\mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\ker\left(\dfrac{1}{a-b}(f-b\mathrm{id}_E)\right)=\ker(f-b\mathrm{id}_E)$. De même, q est le projecteur sur $\mathrm{Im}(f-a\mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\ker(f-a\mathrm{id}_E)$.
Notons que

$$\mathrm{Im}(p)=\ker(p-\mathrm{id}_E)=\ker\left(\frac{1}{a-b}\left(f-b\mathrm{id}_E-a\mathrm{id}_E+b\mathrm{id}_E\right)\right)=\ker\left(\frac{1}{a-b}(f-a\mathrm{id}_E)\right)=\ker(f-a\mathrm{id}_E).$$

De même $\ker(q-e)=\ker(f-b\mathrm{id}_E)$.
Finalement, p (resp. q)est la projection sur $\ker(f-a\mathrm{id}_E)$ (resp. $\ker(f-b\mathrm{id}_E)$) parallèlement à $\ker(f-b\mathrm{id}_E)$ (resp. $\ker(f-a\mathrm{id}_E)$)

4. (a) $F=\mathrm{Vect}(p,q)$, donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$. Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ tel que $\alpha p+\beta q=0$, donc $\alpha p^2+q\circ p=\alpha^2p=0$, donc $\alpha=0$, car p n'est pas nul. On a alors $\beta q=0$ donc $\beta=0$ car q n'est pas nul. La famille (p,q) est libre, c'est une base de F. Ainsi $\dim(F)=2$.
Soient $g=xp+yq$ et $g'=x'p+y'q$ deux éléments de F. Alors

$$g\circ g'=(xp+yq)\circ(x'+y'q)=xxp^2+xy'p\circ q+x'yq\circ p+yy'q^2=xx'p+yy'q.$$

Donc $\forall(g,g')\in F^2$, $g\circ g'\in F$, donc F est stable par la composition.

(b) Soit $g=xp+yq\in F$. g est un endomorphisme de E. Par conséquent g est un projecteur si et seulement si $g^2=g$ ou encore $x^2p+y^2q=xp+yq$ ce qui est équivalent à $x^2=x$ et $y^2=y$. Il y a donc dans F exactement quatre projecteur : p, q, $p+q$ et l'endomorphisme nul.

(c) Soit $g=xp+yq\in F$. $g\in\mathscr{R}(f)\Leftrightarrow g^2=f\Leftrightarrow x^2p+y^2q=ap+bq\Leftrightarrow\begin{cases}x^2&=a\\ y^2&=b\end{cases}$.
Soit δ_a (resp.δ_b) une racine carrée de a (resp.b). $g\in\mathscr{R}(f)\Leftrightarrow x\in\{\delta_a,-\delta_a\}$ et $y\in\{\delta_b,-\delta_b\}$.
Trois cas sont possibles :
- $a\neq 0$ et $b\neq 0$: $\mathscr{R}(f)\cap F$ contient alors quatre éléments : $-\delta_ap-\delta_bq$, $-\delta_ap+\delta_bq$, $\delta_ap-\delta_bq$ et $\delta_ap+\delta_bq$.
- $a=0$ et $b\neq 0$: $\mathscr{R}(f)\cap F$ contient alors deux éléments : $-\delta_bq$ et δ_bq.
- $a\neq 0$ et $b=0$: $\mathscr{R}(f)\cap F$ contient alors deux éléments : $-\delta_ap$et δ_ap.

5. (a) On a $J^2=3J$ et une récurrence immédiate donne $\forall m\in\mathbb{N}^*$, $J^m=3^{m-1}J$. On remaqrue que $A=I_3+J$ et I_3 et J commutent, donc $\forall m\in\mathbb{N}^*$,

$$A^m=\sum_{k=0}^m \mathtt{C}_m^kI_3^{m-k}J^k=I_3+\sum_{k=1}^m\mathtt{C}_m^k3^{k-1}J=I_3+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^m\mathtt{C}_m^k3^k\right)J=I_3+\frac{1}{3}(4^m-1)J$$

égalité valable également pour $m=0$. Ainsi $\forall m\in\mathbb{N}$, $A^m=I_3+\dfrac{1}{3}(4^m-1)J$.

(b) On a $\forall m\in\mathbb{N}$, $A^m=\left(I_3-\dfrac{1}{3}J\right)+4^mJ$. Posons alors $a=1$, $b=4$, $B=I_3-\dfrac{1}{3}J=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$

et $C = \dfrac{1}{3}J = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. On a alors $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$, $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$, $C \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ et $\forall m \in \mathbb{N}$, $A^m = a^m B + b^m C$.

(c) Notons f, p, q les endomorphismes de $\mathbb{C}^3$ de matrices A, B et C dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$. $p \neq 0$, $q \neq 0$ et $\mathrm{id}_E = p + q$, $f = ap + bq$, $f^2 = a^2 p + b^2 q$. Les racines carrées de 1 sont -1 et 1, celles de 4 sont -2 et 2. Par conséquent $\mathscr{R}(f) \cap F = \{-p-2q, -p+2q, p-2q, p+2q\}$. $-B-2C$, $-B+2C$, $B-2C$ et $B+2C$ sont quatre matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ ayant pour carré A.

–II–

1. Soit $P = \sum_{m=0}^{d} a_m X^m$ un élément de $\mathbb{C}[X]$. $P(f) = \sum_{m=0}^{d} a_m f^m = \sum_{m=0}^{d} a_m \sum_{k=1}^{n} x_k^m p_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{m=0}^{d} a_m x_k^m \right) p_k = \sum_{k=1}^{n} P(x_k) p_k$. Ainsi $P(f) = \sum_{k=1}^{n} P(x_k) p_k$.

2. (a) D'après ce qui précède, $\Pi(f) = \sum_{k=1}^{n} \Pi(x_k) p_k = \sum_{k=1}^{n} 0 p_k = 0$. Π est donc un polynôme annulateur de f. En particulier $Sp(f) \subset \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

(b) On remarque d'abord que $L_l(x_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l \\ 1 & \text{si } k = l \end{cases}$. Donc $L_k(f) = \sum_{l=1}^{n} L_k(x_l) p_l = p_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}_n$.

Soit $(k, l) \in \mathbb{N}_n^2$, $P_k \circ p_l = L_k(f) \circ L_l(f) = L_k L_l(f) = \sum_{i=1}^{n} L_k(x_i) L_l(x_i) p_i$. Supposons $k \neq l$, alors $\forall i \in \mathbb{N}_n$, $i \neq k$ ou $i \neq l$, donc $L_k(x_i) L_l(x_i) = 0$ et par conséquent $p_k \circ p_l = 0$.

Supposons $k = l$, alors $p_k \circ p_l = p_k^2 = \sum_{i=1}^{n} (L_k(x_i))^2 p_i = p_k$. Par conséquent, $\forall (k,l) \in \mathbb{N}_n^2$, $p_k \circ p_l = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l \\ p_k & \text{si } k = l \end{cases}$.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}_n$,

$$(f - x_k \mathrm{id}_E) \circ p_k = (X - x_k)(f) \circ L_k(f) = [(X - x_k) L_k](f) = \left(\frac{1}{\Pi_k(x_k)} U \right)(f) = \frac{1}{\Pi_k(x_k)} U(f) = 0.$$

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}_n$, $(f - x_k \mathrm{id}_E) \circ p_k = 0$ et par suite $\forall x \in E$, $(f - x_k \mathrm{id}_E)(p_k(x)) = 0$, donc $\forall y \in \mathrm{Im}(p_k)$, $(f - x_k \mathrm{id}_E)(y) = 0$, ainsi $\mathrm{Im}(p_k) \subset \ker(f - x_k \mathrm{id}_E)$. p_k n'est pas l'endomorphisme nul, donc $\mathrm{Im}(p_k) \neq \{0\}$, par conséquent $\ker(f - x_k \mathrm{id}_E) \neq \{0\}$. Ceci montre que x_k est une valeur propre de f. Donc $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset Sp(f)$. Or nous avions vue que $Sp(f) \subset \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Finalement $Sp(f) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

3. On sait que p_k est un projecteur de E. Pour conclure, il suffit de montrer que $\mathrm{Im}(p_k) = \ker(f - x_k \mathrm{id}_E)$ et $\ker(p_k) = V_k$. On a déjà $\mathrm{Im}(p_k) \subset \ker(f - x_k \mathrm{id}_E)$. D'après le lemme des noyaux, on a :

$$E = \bigoplus_{l=1}^{n} \ker(f - x_l \mathrm{id}_E)$$

Pour tout $x \in E$, $x = \sum_{l=1}^{n} p_l(x)$, donc $E = \sum_{l=1}^{n} \mathrm{Im}(p_l)$. On a $\mathrm{Im}(p_l) \subset \ker(f - x_l \mathrm{id}_E)$ pour tout $l \in \mathbb{N}_n$, comme $\ker(f - x_1 \mathrm{id}_E), \ker(f - x_2 \mathrm{id}_E), ..., \ker(f - x_n \mathrm{id}_E)$ sont en somme directe il en est de même pour $\mathrm{Im}(p_1), \mathrm{Im}(p_2), ..., \mathrm{Im}(p_n)$. Supposons qu'il existe $i \in \mathbb{N}_n$ tel que $\mathrm{Im}(p_i) \subsetneq \ker(f - x_i \mathrm{id}_E)$, alors $\dim \mathrm{Im}(p_i) < \dim \ker(f - x_i \mathrm{id}_E)$ et donc

$$\dim E = \sum_{l=1}^{n} \dim \mathrm{Im}(p_l) < \sum_{l=1}^{n} \dim \ker(f - x_l \mathrm{id}_E) = \dim E$$

ce qui est absurde. Donc $\forall k \in \mathbb{N}_n$, $\mathrm{Im}(p_k) = \ker(f - x_k \mathrm{id}_E)$.
Ne reste plus qu'à montrer que $\ker p_k = V_k$. Soit $l \in \mathbb{N}_n \setminus \{k\}$, $\forall x \in \ker(f - x_l \mathrm{id}_E)$, $p_l(x) = x$ car p_l est la projection sur $\ker(f - x_l \mathrm{id}_E)$. Ainsi, $p_k(x) = p_k(p_l(x)) = p_l \circ p_l(x) = 0$ et donc $\ker(f - x_l \mathrm{id}_E) \subset \ker p_k$ et donc $V_k \subset \ker p_k$.
Réciproquement, soit $x \in \ker p_k$,

$$x = p_1(x) + ... + p_{k-1}(x) + 0 + p_{k+1}(0) + ... + p_n(x).$$

Donc $x \in \displaystyle\sum_{l=1,\neq k}^{n} \mathrm{Im}(p_l) = \sum_{l=1,\neq k}^{n} \ker(f - x_l \mathrm{id}_E) = V_k$. Finalement : $\forall k \in \mathbb{N}_n$, $\ker p_k = V_k$.

4. (a) Soit $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k p_k = 0$, donc $\forall l \in \mathbb{N}_n$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k p_k \circ p_l = 0 \circ p_l = 0$, donc $\alpha_l p_l^2 = \alpha_l p_l = 0$ puis $\alpha_l = 0$. Donc la famille $(p_1, p_2, ..., p_n)$ est libre. Par conséquent $(p_1, p_2, ..., p_n)$ est une famille libre et génératrice de F, donc c'est une base de F. D'où $\dim F = n$.

(b) Soit $g = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k p_k$ un élément de F, alors $g^2 = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k p_k\right)^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \alpha_k \alpha_l p_k \circ p_l = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 p_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 p_k$.
Ainsi $g \in \mathscr{R}(f)$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 p_l = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k$ ou encore si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}_n$, $\alpha_k^2 = x_k$.
Deux cas sont possibles :
• $\forall k \in \mathbb{N}_n$, $x_k \neq 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, x_k possède deux racines carrées distinctes $-\delta_k$ et δ_k. Ainsi $g \in \mathscr{R}(f)$ si et seulement si il existe $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que $g = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \delta_k p_k$. Il y a autant d'éléments dans $\mathscr{R}(f) \cap F$ que d'éléments dans $\{-1, 1\}^n$. Donc $\mathrm{card}(\mathscr{R} \cap F) = 2^n$.
• Il existe $k_0 \in \mathbb{N}_n$, $x_{k_0} = 0$, $x_1, ..., x_{k_0-1}, x_{k_0+1}, ..., x_n$ sont alors non nuls et possèdent chacun deux racines carrées distinctes. Notons $-\delta_k$ et δ_k les deux racines carrées de x_k pour $k \in \mathbb{N}_n \backslash \{k_0\}$, alors $g \in \mathscr{R}$ si et seulement si $\alpha_k^2 = x_k$ ou encore si et seulement si $\alpha_{k_0} = 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}_n \backslash \{k_0\}$, $\alpha_k \in \{-\delta_k, \delta_k\}$. Il y a donc 2^{n-1} éléments dans $\mathscr{R}(f) \cap F$.

(c) Soit $g = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k p_k$ un élément de F. $g \in \mathscr{L}(E)$, par conséquent g est un projecteur si et seulement si $g^2 = g$. Or

$$g^2 = g \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 p_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k p_k \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}_n, \alpha_k^2 = \alpha_k \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}_n, \ \ \alpha_k = 0 \text{ ou } \alpha_k = 1.$$

Il y a donc exactement 2^n projecteur dans F.

5. (a) $\dim E = N = n$ et f à N valeurs propres distinctes $x_1, x_2, ..., x_n$, donc les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres sont des droites vectorielles. Pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, on note e_k un vecteur propre non nul associé à la valeur propre x_k. Donc $\mathscr{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de vecteurs propres de f. Soit maintenant $g \in \mathscr{L}(E)$ et $g \circ f = f \circ g$, alors les sous-espaces propres $\ker(f - x_i \mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}(e_i)$ sont stables par g, ainsi pour chaque $k \in \mathbb{N}_n$, il existe $\mu_k \in \mathbb{C}$ tel que $g(e_k) = \mu e_k$. Montrons que $g = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mu_k p_k$. g et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mu_k p_k$ étant deux endomorphismes de E pour montrer qu'ils sont égaux montrer qu'ils coïncident dans la base $\mathscr{B}$.
Soit $l \in \mathbb{N}_n$ et $k \in \mathbb{N}_n$. Si $l \neq k$, alors $p_k(e_l) = 0$ car $e_l \in V_k = \ker(f - x_k \mathrm{id}_E)$. Si $l = k$, $p_k(e_l) = p_k(e_k) = e_k$. Donc $\forall l \in \mathbb{N}_n$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mu_k p_k(e_l) = \mu_l p_l(e_l) = \mu_l e_l = g(e_l)$. Ceci montre que $g = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mu_k p_k$ et donc $g \in F$.
Réciproquement, si $g \in F$ avec $g = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \beta_k p_k$, alors $g \circ f = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \beta_k p_k\right) \circ \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k p_k\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k p_k = f \circ g$.

(b) Soit $g \in \mathscr{R}(f)$, donc $g \circ f = f^2 \circ f = f^3 = f \circ f^2 = f \circ g$, ainsi g commute avec f et donc $g \in F$. Par conséquent $\mathscr{R}(f) \subset F$ et donc $\mathscr{R}(f) = \mathscr{R}(f) \cap F$. Notons alors que $\mathscr{R}(f)$ a 2^n éléments si aucun des x_k n'est pas nul et 2^{n-1} éléments si l'un des x_k est nul.

6. Pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, notons $E_{x_k}(h) = \ker(h - x_k \mathrm{id}_E)$ le sous-espace propre de h associé à la valeur propre x_k. On a $E = \bigoplus_{k=1}^{n} E_{x_k}(h) = E_{x_l}(h) \oplus \bigoplus_{k=1, \neq l}^{n} E_{x_l}(h)$. Notons q_k la projection sur $E_{x_k}(h)$ parallèlement à $\bigoplus_{k=1, \neq l}^{n} E_{x_l}(h)$. Montrons alors que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \ \ h^m = \sum_{k=1}^{n} x_k^m q_m.$$

Fixons $m \in \mathbb{N}^*$ et y dans E. Il existe $(y_1, y_2, ..., y_n) \in E_{x_1}(h) \times E_{x_2}(h) \times ... \times E_{x_n}(h)$ unique tel que $y = y_1 + y_2 + ... + y_n$. Soit $k \in \mathbb{N}_n$, $y_k \in E_{x_k}(h) = \ker(h - x_i \mathrm{id}_E)$, $h(y_k) = x_k y_k$, donc $h^m(y_k) = x_k^m y_k$. De plus $y = y_k + \sum_{l=1, \neq k}^{n} y_l$, donc $q_k(y) = y_i$. Ainsi

$$h^m(y) = \sum_{k=1}^{n} h^m(y_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k^m y_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^m q_k(y) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^m q_k \right)(y)$$

ceci pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $y \in E$. Donc $\forall m \in \mathbb{N}$, $h^m = \sum x_k^m q_k$. Il ne reste plus qu'à dire que $\forall k \in \mathbb{N}_n$, q_k est non nul. Ceci est clair car $\mathrm{Im}(q_k) = E_{x_k}(h) = \ker(h - x_k \mathrm{id}_E) \neq \{0\}$.

7. (a) λ est une valeur propre de A si et seulement si $\det(\lambda I_3 - A) = 0$. Cherchons alors ce déterminant.

$$\det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 1 - 1 - \lambda + \lambda - \lambda = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

D'où $Sp(A) = \{-1, 0, 1\}$. Nous poserons $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ et $x_3 = 1$.

(b) On trouve $L_1 = \frac{1}{2}X(X-1) = \frac{1}{2}(X^2 - X)$, $L_2 = -X^2 + 1$ et $L_3 = \frac{1}{2}(X^2 + X)$.
$A_1 = L_1(A) = \frac{1}{2}(A^2 - A)$, $A_2 = L_2(A) = -A^2 + I_3$, $A_3 = L_3(A) = \frac{1}{2}(A^2 + A)$. Notons que $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Il vient alors $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ est A. $Sp(h) = \{x_1, x_2, x_3\}$. Posons $\forall i \in \mathbb{N}_3$, $H_i = \ker(h - x_i \mathrm{id}_E)$ et $\widehat{H}_i = \bigoplus_{k=1, \neq i}^{3} H_k$. Pour tout $i \in \mathbb{N}_3$, notons q_i la projection sur H_i parallèlement à $\widehat{H}_i$.

— $n = N = 3$,
— $\forall i \in \mathbb{N}_3$, $q_i \neq 0$,
— $\forall m \in \mathbb{N}$, $h^m = \sum_{k=1}^{3} x_k^m q_k$,
— $\forall i \in \mathbb{N}_3$, $q_i = L_i(h)$, A_i est la matrice de q_i dans la base canonique,
— $\mathscr{R}(h) = \mathscr{R}(h) \cap \mathrm{Vect}(q_1, q_2, q_3)$,
— $g \in \mathscr{R}(h) = \mathscr{R}(h) \cap F \Leftrightarrow \exists(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $g = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 q_3$ avec $\alpha_1^2 = -1$, $\alpha_2^2 = 0$ et $\alpha_2 = 3^2 = 1$.

Donc $\mathscr{R}(h) = \{iq_1 + q_3, iq_1 - q_3, -iq_1 + q_3, -iq_1 - q_3\}$ et par conséquent

$$\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C}) | M^2 = A\} = \{iA_1 + A_3, iA_1 - A_3, iA_1 + A_3, -iA_1 - A_3\}.$$

1. (a) Puisque $u^{n-1} \neq 0$, alors il existe $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. Montrons que $(x, u(x), ..., n_{n-1}(x))$ est libre.
Soit $(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\alpha_0 x + \alpha_1 u(x) + ... + \alpha_{n-1} n_{n-1}(x) = 0$. Montrons par une récurrence faible que $\forall k \in \mathbb{N}_n$, $\alpha_k = 0$. On a

$$u^{n-1}(\alpha_0 x + \alpha_1 u(x) + ... + \alpha_{n-1} n_{n-1}(x)) = \alpha_0 u^{n-1}(x) = 0.$$

Donc $\alpha_0 = 0$ car $u^{n-1}(x) \neq 0$.
Supposons $\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$ pour $k \in \mathbb{N}_{n-2}$ et montrons que $\alpha_{k+1} = 0$. On a donc $\alpha_{k+1} u^{k+1}(x) + \alpha_{k+2} u^{k+2}(x) + ... + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x) = 0$, composons par u^{n-2-k}, donc $\alpha_{k+1} u^{n-1}(x) + \alpha_n u^{k+2}(x) + ... + \alpha_{n-1} u^{2n-3-k}(x) = 0$, or $u^i(x) = 0$ pour $k \geq n$ donc $\alpha_{k+1} u^{n-1}(x) = 0$ et donc $\alpha_{k+1} = 0$. Ceci achève la récurrence. Par conséquent la famille $(x, u(x), ..., n_{n-1}(x))$ est libre.
Notons que nécessairement $n \leq N$.

(b) Par division euclidienne, il existe un couple unique (Q, R) de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tel que $P = X^n Q + R$ avec $R = 0$ ou $\deg R \leq n-1$.
Supposons X^n divise P, alors $R = 0$ et donc $P(u) = (X^n Q)(u) = u^n \circ Q(u) = 0$.
Réciproquement, supposons que $P(u) = 0$. Alors $0 = u^n \circ Q(u) + R(u) = R(u)$. Si $R = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$, alors en particulier $R(u)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(x) = 0$. Comme $(x, u(x), ..., n_{n-1}(x))$ est libre, $\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_{n-1} = 0$ et donc $R = 0$ et par conséquent X^n divise P.

(c) Supposons $\mathscr{R}(u) \neq \varnothing$. Il existe $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $v^2 = u$. Donc $v^{2n} = u^n = 0$ et $v^{2n-2} = u^{n-1} \neq 0$.
• Si $v^{2n-1} \neq 0$, comme $v^{2n} = 0$, il vient $2n \leq N$.
• Si $v^{2n-1} = 0$ comme $v^{2n-2} = 0$, il vient $2n-1 \leq N$.
Donc dans tous les cas $n \leq \dfrac{N+1}{2}$.

2. (a) D'après le cours des séries entières, on a :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} 1.3.5 \ldots (2n-3)}{2^n (n!)} x^n + ... = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

avec $a_0 = 1$ et $a_k = \dfrac{(-1)^{k-1} 1.3.5 \ldots (2k-3)}{2^k (k!)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

(b) On a $\sqrt{1+x} = P_n(x) + x_n x^n + o(x^n) = P_n(x) + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$. Elevons au carré :

$$1 + x = P_n(x)^2 + a_n^2 x^{2n} + x^{2n}(\varepsilon(x))^2 + 2a_n x^n P_n(x) + 2x^n \varepsilon(x) P_n(x) + 2a_n x^n \varepsilon(x)$$

$$\frac{1 + x - P_n(x)^2}{x^n} = a_n^2 x^n + x^n(\varepsilon(x))^2 + 2a_n P_n(x) + 2\varepsilon(x) P_n(x) + 2a_n \varepsilon(x)$$

D'où $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 + x - P_n(x)^2}{x^n} = 2a_n P_n(0) = 2a_n$, par conséquent $x \mapsto \dfrac{P_n(x)^2 - 1 - x}{x^n}$ admet une limite finie en 0.
D'autre part, par division euclidienne, il existe des polynomes Q et R tels que $P_n^2 - X - 1 = X^n Q + R$ avec $R = 0$ eu $\deg(R) \leq n-1$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{P_n(x)^2 - x - 1}{x^n} - Q(x) = \dfrac{R(x)}{x^n}$, donc $x \mapsto \dfrac{R(x)}{x^n}$ admet une limite finie en 0. Supposons $R = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k X^k \neq 0$. Soit $i = \min\{k \in \mathbb{N}_{n-1} | \beta_k \neq 0\}$, alors $R(x) = \sum_{k=i}^{n-1} \beta_k x^k \underset{0}{\sim} \beta_i x^i$, $\dfrac{R(x)}{x^n} \underset{0}{\sim} \beta_i \dfrac{1}{x^{n-i}}$, ce qui donne $\lim_{x \to 0} \left| \dfrac{R(x)}{x^n} \right| = +\infty$. Donc nécessairement $R = 0$.
Finalement X^n divise $P_n^2 - X - 1$.

3. (a) Soient Q_1 et Q_2 deux polynômes tels que X^n divise $Q_1^2 - X - w^2$ et $Q_2^2 - X - w$, donc X^n divise $(Q_1^2 - X - w^2) - (Q_2^2 - X - w) = Q_1^2 - Q_2^2$. En particulier $(Q_1^2 - Q_2^2)(0) = 0$ (0 est une racine de $Q_1^2 - Q_2^2$ d'ordre au moins n). Donc $(Q_1 - Q_2)(0) = 0$ ou $(Q_1 + Q_2)(0) = 0$. Montrons que l'on ne peut avoir $(Q_1 - Q_2)(0) = (Q_1 + Q_2)(0) = 0$.
Supposons ait lieu, $Q_1(0) = Q_2(0) = 0$. Or il existe un polynôme T tel que $Q_1^2 - X - w^2 = X^n T$, donc $Q_1^2(0) - 0 - w^2 = 0$ alors $w^2 = 0$ ce qui absurde. Donc ou $[(Q_1 - Q_2)(0) = 0 \text{ et } (Q_1 + Q_2)(0) \neq 0]$ ou $[(Q_1 - Q_2)(0) \neq 0 \text{ et } (Q_1 + Q_2)(0) = 0]$.
Envisageons le cas $[(Q_1 - Q_2)(0) = 0 \text{ et } (Q_1 + Q_2)(0) \neq 0]$. X^n divise $(Q_1 Q_2)(Q_1 + Q_2)$ et 0 n'est pas une racine de $Q_1 + Q_2$ donc X^n divise $Q_1 - Q_2$. Or $\deg(Q_1 - Q_2) \leq n - 1$, donc $Q_1 - Q_2 = 0$ ou encore $Q_1 = Q_2$.
Un raisonnement analogue preuve que si $[(Q_1 - Q_2)(0) \neq 0 \text{ et } (Q_1 + Q_2)(0) = 0]$, alors $Q_1 = -Q_2$.
Pour conclure, montrons que X^n divise $Q_{n,w}^2 - X - w^2$. On a X^n divise $P_n^2 - X - 1$, donc il existe $T \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P_n^2 - X - 1 = X^n T$, donc $P_n^2\left(\frac{X}{w^2}\right) - \frac{X}{w^2} - 1 = \left(\frac{X}{w^2}\right)^n T\left(\frac{X}{w^2}\right)$, en multipliant par w^2, on obtient :

$$w^2 P_n^2\left(\frac{X}{w^2}\right) - X - w^2 = \frac{X^n}{w^{2n-2}} T\left(\frac{X}{w^2}\right).$$

Donc X^n divise $w^2 P_n^2\left(\frac{X}{w^2}\right) - X - w^2 = Q_{n,w}^2 - X - w$, de plus $Q_{n,w} \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ car $P_n \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.
Soit maintenant $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que X^n divise $Q^2 - X - w$, alors par unicité $Q = Q_{n,w}$ ou $Q = -Q_{n,w}$.
Finalement l'ensemble des polynômes Q de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tels que X^n divise $Q^2 - X - w^2$ est $\{Q_{n,w}, -Q_{n,w}\}$.

(b) X^n divise $Q_{n,w}^2 - X - w^2$ donc $Q_{n,w}^2(u) - u - w^2 \mathrm{id}_E = 0$. Par conséquent $(Q_{n,w}(u))^2 = u + w^2 \mathrm{id}_E$, donc $Q_{n,w}(u) \in \mathscr{R}(u + w\mathrm{id}_E)$ ce qui montre que $\mathscr{R}(u + w^2 \mathrm{id}_E) \neq \varnothing$. Notons également que $-Q_{n,w}(u) \in \mathscr{R}(u + w\mathrm{id}_E)$

4. (a) Si $g \in \mathscr{R}(u + w^2 \mathrm{id}_E)$ alors $u = g^2 - w^2 \mathrm{id}_E$ est un polynôme en g, donc $g \circ u = u \circ g$.

(b) $g(x) \in E$ et $(x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$ est une base de E, donc il existe des scalaires $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ de $\mathbb{C}$ tels que $g(x) = \sum_{k=0}^{n-} \alpha_k u^k(x)$. Posons $P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$. Alors $P \in \mathbb{C}[X]$ et $g(x) = P(u)(x)$.
$(x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$ étant une base de E pour montrer que les deux endomorphismes g et $P(u)$ sont égaux il suffit de montrer que $\forall k \in \mathbb{N}_{n-1}$, $g(u^k(x)) = (P(u))(u^k(x))$.
Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$(P(u))(u^k(x)) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i\right)(u^k(x)) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_k u^{i+k}(x) = u^k\left(\left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i\right)(x)\right)$$

$$P(u)(u^k(x)) = u^k(P(u)(x)) = u^k(g(x)) = g(u^k(x)).$$

Donc $g = P(u)$.

(c) Soit $g^2 = u + w^2 \mathrm{id}_E$, donc $P(u)^2 - u - w^2 \mathrm{id}_E = (P^2 - X - w^2)(u) = 0$, donc X^n divise $P^2 - X - w^2$. Comme $\deg P \leq n - 1$, donc $P = Q_{n,w}$ ou $P = -Q_{n,w}$. Donc $g = P(u) = Q_{n,w}(u)$ ou $g = P(u) = -Q_{n,w}$. Par conséquent $\mathscr{R}(u + w^2 \mathrm{id}_E) \subset \{Q_{n,w}, -Q_{n,w}\}$. Comme dans la question 3.b de cette partie, nous avons prouver l'inclusion contraire, nous avons donc $\mathscr{R}(u + w^2 \mathrm{id}_E) = \{Q_{n,w}, -Q_{n,w}\}$

5. $A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $(A - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(A - I_4)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(A - I_4)^4 = 0$.

Donc $A = I_4 + B$ avec $B^3 \neq 0$ et $B^4 = 0$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ de matrice A dans la base canonique et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ de matrice B dans la base canonique. $f = u + 1^2 \mathrm{id}_E$, $u^3 \neq 0$ et $u^4 = 0$.
$\mathscr{R}(f) = \mathscr{R}(u + 1^2 \mathrm{id}_E) = \{Q_{4,1}, -Q_{4,1}\}$ avec $Q_{4,1} = 1 P_4\left(\frac{X}{1^2}\right) = P_4(X) = 1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{16}X^3$.

Par conséquent $\left\{M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{C}) | M^2 = A\right\} = \left\{I_4 + \frac{1}{2}B - \frac{1}{8}B^2 + \frac{1}{16}B^3, -I_4 - \frac{1}{2}B + \frac{1}{8}B^2 - \frac{1}{16}B^3\right\} = \{T, -T\}$

avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Soit v_0 un élément de $\mathscr{R}(u)$, c'est-à-dire $v_0^2 = u$, donc $v_0^{2n} = u_n = 0$ et $v_0^{2n-2} = u^{n-1} \neq 0$. Deux cas sont possibles :

• Premier cas : $v_0^{2n-1} = 0$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $(v_0 + \lambda u^{n-1})^2 = v_0^2 + 2\lambda v_0 \circ u^{n-1} + \lambda^2 u^{2n-2} = v_0^2 + 2\lambda v_0 \circ v_0^{2n-2} = v_0^2 = u$. Donc $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $v_0 + \lambda u^{n-1} \in \mathscr{R}(u)$, $\mathscr{R}(u)$ contient une infinité d'éléments car $u^{n-1} \neq 0$.

• Deuxième cas : $v_0^{2n-1} \neq 0$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $(v_0 + \lambda v_0 \circ u^{n-1})^2 = v_0^2 + 2\lambda v_0^2 \circ u^{n-1} + \lambda^2 v_0^2 u^{2n-2} = v_0^2 + 2\lambda v_0 \circ v_0^{2n-2} = v_0^2 = u$. Donc $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $v_0 + \lambda v_0 \circ u^{n-1} \in \mathscr{R}(u)$, $\mathscr{R}(u)$ contient une infinité d'éléments car $v_0 \circ u^{n-1} = v_0^{2n-1} \neq 0$.

Dans les deux cas $\mathscr{R}(u)$ est infini.

7. (a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

$$AM = MA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = & e \\ b & = & 0 \\ c & = & 0 \\ h & = & 0 \end{cases}$$

Donc $\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C}) | AM = MA\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & f \\ g & 0 & i \end{pmatrix} | (a, d, f, g, i) \in \mathbb{C}^5 \right\}$.

(b) Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Si $M^2 = A$ alors A et M commutent, par conséquent M est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & f \\ g & 0 & i \end{pmatrix}$.

Donc

$$M^2 = A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2ad + fg & a^2 & af + fi \\ ga + ig & 0 & i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = i = 0, fg = 1.$$

D'où

$$\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C}) | M^2 = A\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & f \\ \frac{1}{f} & 0 & 0 \end{pmatrix} | (d, f) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \right\}.$$

–IV–

1. (a) L'ensemble $\{P \in \mathbb{C}[X] | P(f) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{C}[X]$ non réduit à $\{0\}$, car il contient, par exemple, le polynôme caractéristique de f (théorème de Cayley-Hamilton). Donc il existe un polynôme unitaire unique Φ_f tel que $\{P \in \mathbb{C}[X] | P(f) = 0\} = \{\Phi_f Q | Q \in \mathbb{C}[X]\}$.

(b) Le polynôme caractéristique χ_f est un polynôme annulateur, donc Φ_f divise χ_f, donc il existe des scalaires $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ tels que

$$\Phi_f = \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)^{\beta_k}$$

avec $\forall k \in \mathbb{N}_n$, $0 \leq \beta_k \leq \alpha_k$. Montrons que $k \in \mathbb{N}_n$, $\beta_k \geq 1$. Pour cela il suffit de montrer que les racines de χ_f sont des racines de Φ_f.

Soit $\lambda \in \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, donc λ est une valeur propre de f. Il existe donc un vecteur x non nul tel que $f(x) = \lambda x$.
Une récurrence immédiate prouve que pour tout entier strictement positif k, on a $f^k(x) = \lambda^k x$, d'où on déduit que pour tout polynôme P à coefficients dans $\mathbb{C}$, on a

$$P(u)(x) = P(\lambda)x.$$

En appliquant ce résultat avec le polynôme Φ_f, on obtient

$$0 = \Phi_f(f)(x) = \Phi_f(\lambda)x.$$

Comme le vecteur x est non nul on en déduit que $\Phi_f(\lambda) = 0$. Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}_n$, $\beta_k \geq 1$.

2. Les E_k sont stables par f et $f \circ g = g \circ f$, donc les E_k sont également stables par g.

3. (a) Montrons que la dimension de $E_1 = \ker f^{\alpha_1}$ est égale à la multiplicité α_1 de $x_1 = 0$. Notons f_1 l'endomorphisme induit par f sur E_1. On peut écrire $\chi_f = X^{\alpha_1} Q$ où Q est premier avec X (ce qui est équivalent $Q(0) \neq 0$). Vu que $f_1^{\alpha_1} = 0$, on a $\chi_{f_1} = X^k$, où k est la dimension de E_1. Par le lemme des noyaux, $E = E_1 \oplus \ker Q(f)$ où $\ker Q(f)$ est stable par f. Donc $\chi_f = \chi_{f_1}\chi_g$ où g est l'endomorphisme induit par f dans $\ker Q(f)$. Mais 0 n'est pas une valeur propre de g (tous les vecteurs propres associés à 0 appartiennent à E_1), donc $\chi_g(0) \neq 0$. Par conséquent, $\chi_{f_1} = X^{\alpha_1}$ et $k = \alpha_1$.
D'après la définition de Φ_f, $f_1^{\beta_1} = 0$ et $f_1^{\beta_1 - 1} \neq 0$, sinon on aura un polynôme annulateur de f de degré inférieur à celui de Φ_f. L'indice de nilpotence de f_1 est donc β_1.
Ainsi, en utilisant le résultat de question 1.c de la partie II :

$$\left[x_1 = 0 \text{ et } \beta_1 > \frac{\alpha_1 + 1}{2}\right] \Rightarrow \mathscr{R}(f_1) = \varnothing \Rightarrow \mathscr{R}(f) = \varnothing.$$

(b) Notons f_k l'endomorphisme induit par f sur E_k et posons $u_k = f_k - x_k \mathrm{id}_E$. On sait que u_k, considérée comme un endomorphisme de E_k, est nilpotent. Notons δ_k l'une des racines (non nulle) de x_k. Alors $f_k = u_k + \delta_k^2 \mathrm{id}_E$. D'après la partie III, $\mathscr{R}(u_k + \delta_k^2 \mathrm{id}_E) \neq \varnothing$. Donc $\mathscr{R}(f) \neq \varnothing$.

(c) Dans cette condition f_1 et nilpotent avec $f_1^{\alpha_1} = 0$ et $\alpha_1 \geq 2$. Si $\mathscr{R}(f) \neq \varnothing$ alors en particulier $\mathscr{R}(f_1) \neq \varnothing$. Ainsi, d'après la question 6, $\mathscr{R}(f_1)$ possède une infinité d'éléments. Il est de même de $\mathscr{R}(f)$.

4. (a) $g \in \mathscr{R}(f) \Leftrightarrow g^2 = f \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}_n$, $g_k^2 = f_k$ où g_k est l'endomorphisme induit par g sur E_k. Ainsi, d'après la question 5 de la partie II, et comme $0 \notin Sp(f)$, alors $\forall k \in \mathbb{N}_n$, $\mathrm{card}\left\{g_k \in \mathscr{L}(E_k) | g_k^2 = f_k\right\} = \mathrm{card}\,\mathscr{R}(u_k + x_k \mathrm{id}_E) = 2$ et donc $\mathrm{card}\,\mathscr{R}(f) = 2^n$.

(b) Toujours d'après le résultat de la question 5, $\mathrm{card}\,\mathscr{R}(f) = 2^{n-1}$ si $x_1 = 0$ et $\alpha_1 = 1$.

• • • • • • • • • • •